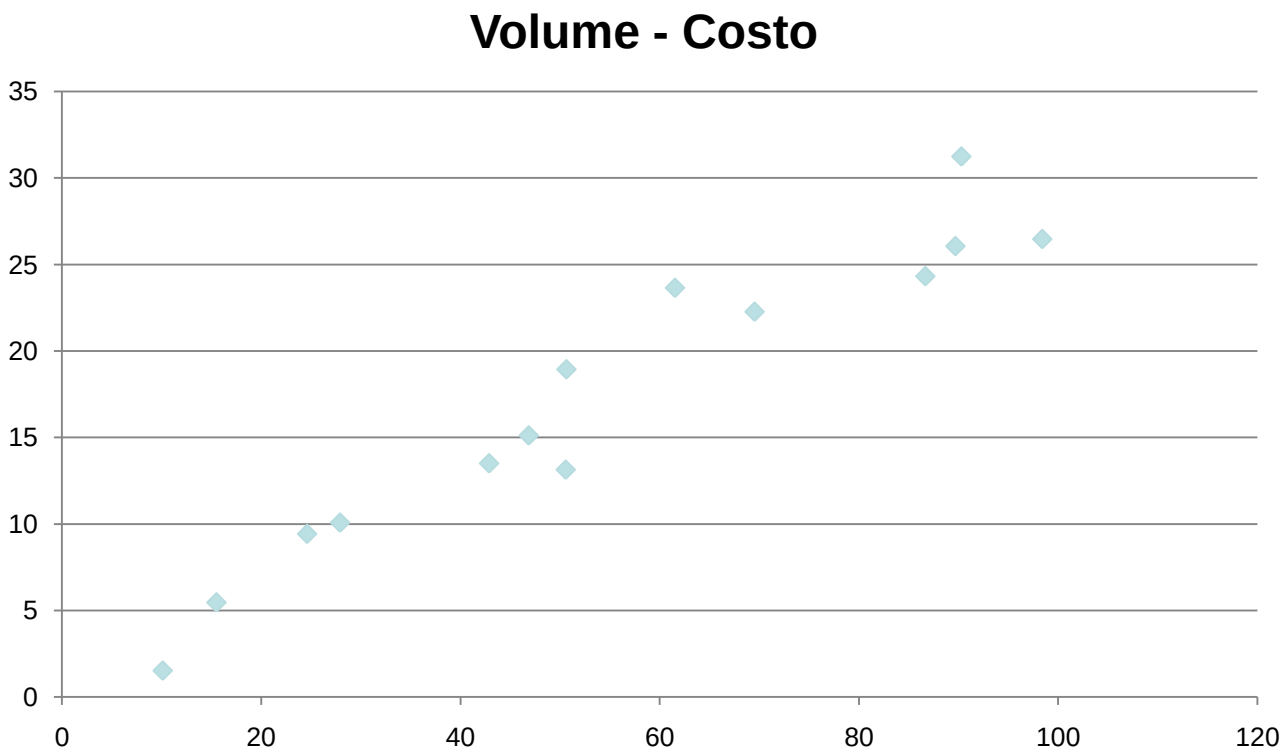
Regressione

Esempio

Un'azienda manifatturiera vuole analizzare il legame che intercorre tra il volume produttivo X per uno dei propri stabilimenti e il corrispondente costo mensile Y di produzione.

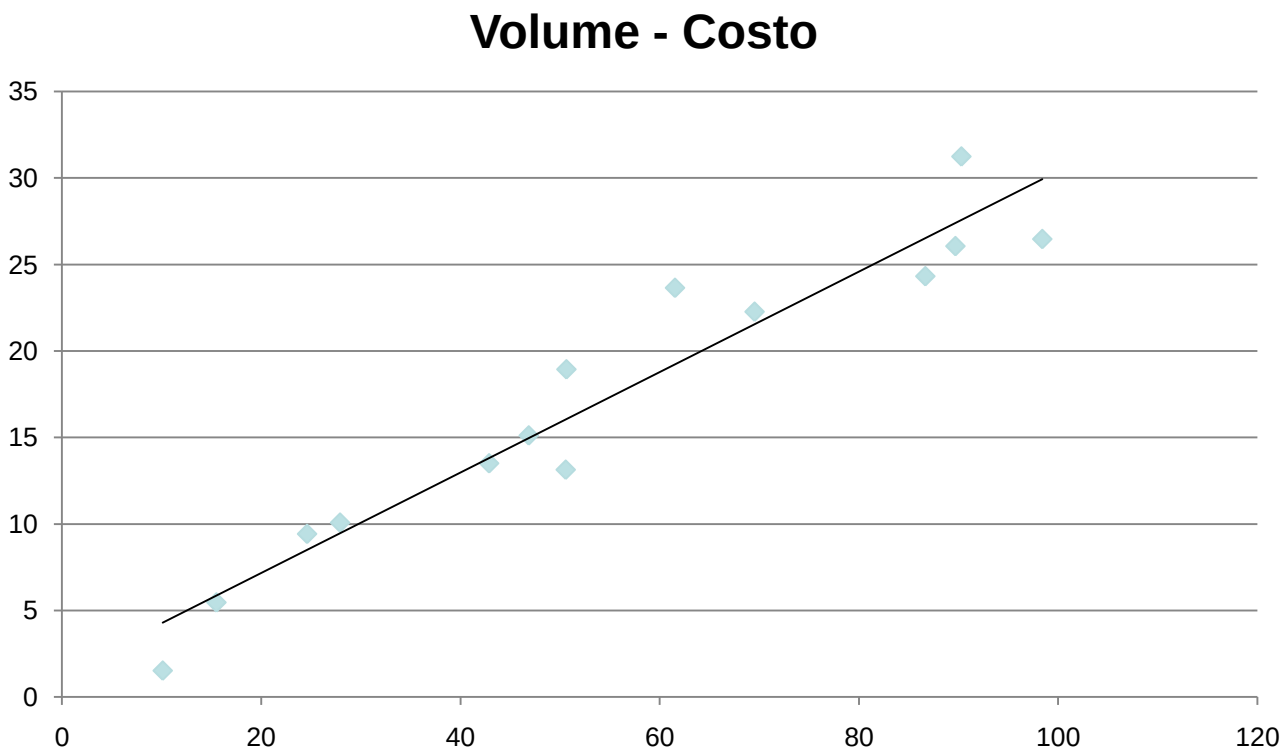
Volume X (ton.)	Costo Y (K€)	Volume X (ton.)	Costo Y (K€)
10.11	*1.53*	42.87	*13.51*
50.56	*13.14*	61.53	*23.65*
90.28	*31.24*	24.60	*9.43*
15.50	*5.47*	46.85	*15.12*
69.52	*22.27*	50.63	*18.94*
98.40	*26.47*	89.68	*26.06*
86.66	*24.32*	27.91	*10.08*

Esempio



- È possibile trovare un legame semplice e tendenziale tra la variabile dipendente Y (costo) e la variabile indipendente X (volume)?

Esempio



- Tale funzione permette di:
  - Evidenziare il legame della variabile dipendente da quella indipendente
  - Predire il valore futuro dell'attributo target.

Modelli di stima

- Si ipotizza l'esistenza di una funzione $f: R^n \rightarrow R$ che esprime il legame tra la variabile dipendente Y e le n variabili esplicative X_j

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

- Tale funzione va cercata in una classe di funzioni che assicuri:
  - l'identificazione accurata tra target e variabili indipendenti, per garantire errori di modesta entità per le osservazioni disponibili
  - Una buona capacità di predire i valori futuri (generalizzazione)

Modelli di stima

- Si ipotizza l'esistenza di una funzione $f: R^n \rightarrow R$ che esprime il legame tra la variabile dipendente Y e le n variabili esplicative X_j

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

- La funzione f può essere:
  - Lineare: $Y = b + \omega X$
  - Quadratica: $Y = b + \omega X + d X^2$
    - Posto $Z = X^2$, il modello è $Y = b + \omega X + d Z$
  - Esponenziale: $Y = e^{b + \omega X}$
    - Posto $Z = log\ Y$, il modello è $Z = b + \omega X$

Modello probabilistico

- E' improbabile che le coppie (X,Y) si dispongano esattamente lungo una retta del piano.
- E' più realistico supporre un legame di natura approssimata tra X e Y, espresso dal modello

$$Y = \omega X + b + \varepsilon$$

con ε variabile casuale detta *scarto* o *errore*, che deve soddisfare alcune ipotesi di natura stocastica.

- Deve essere assimilabile ad un errore casuale, oppure assimilabile all'effetto su Y di variabili non considerate
- Supponiamo ε variabile aleatoria con distribuzione normale di media 0 e deviazione standard σ

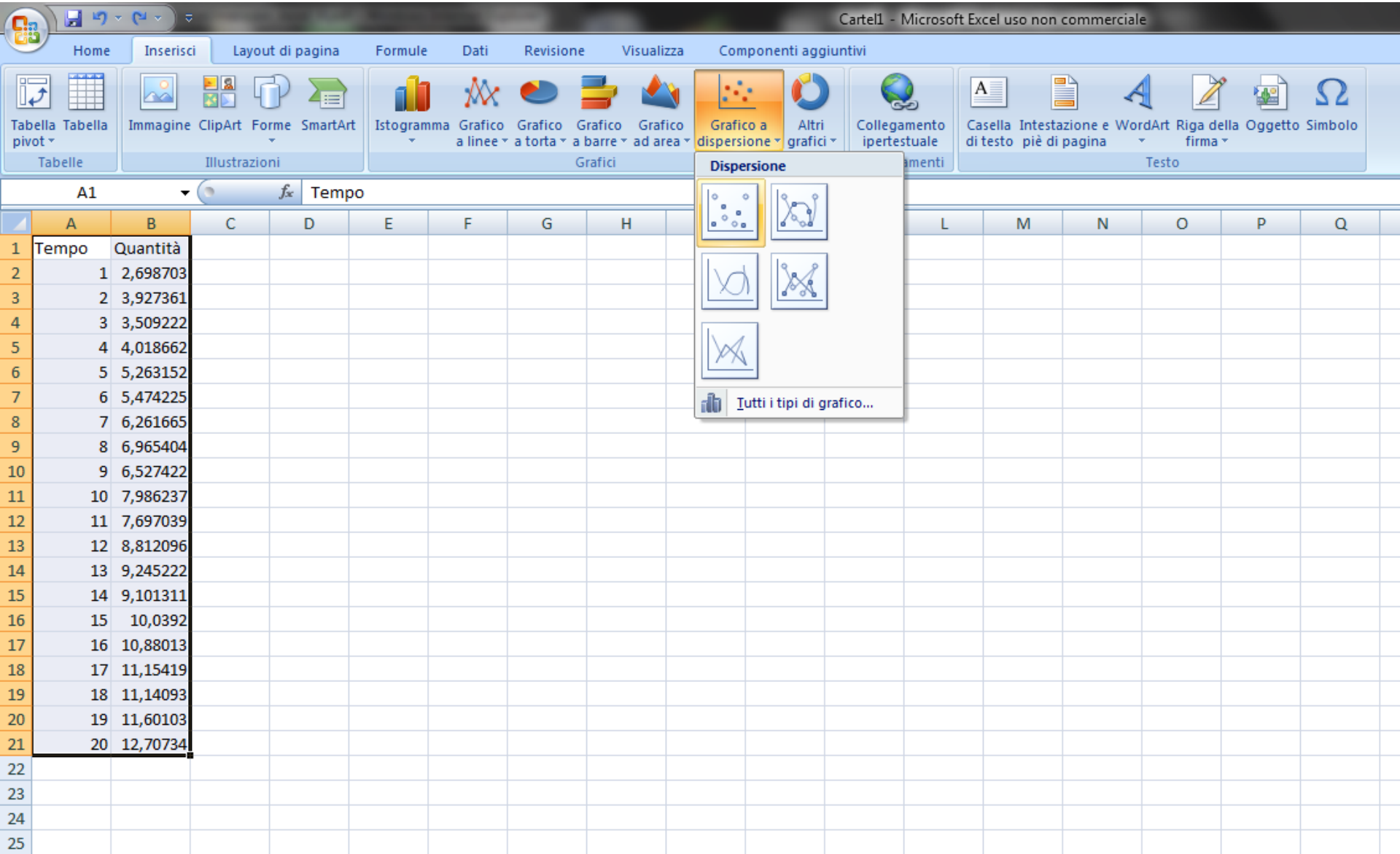
Calcolo della retta di regressione

- L'identificazione della retta di regressione si riduce all'identificazione del coefficiente angolare ω e dell'intercetta b. della retta $Y = \omega X + b + \varepsilon$
- Minimizzazione della funzione SSE (*sum of squared errors*):

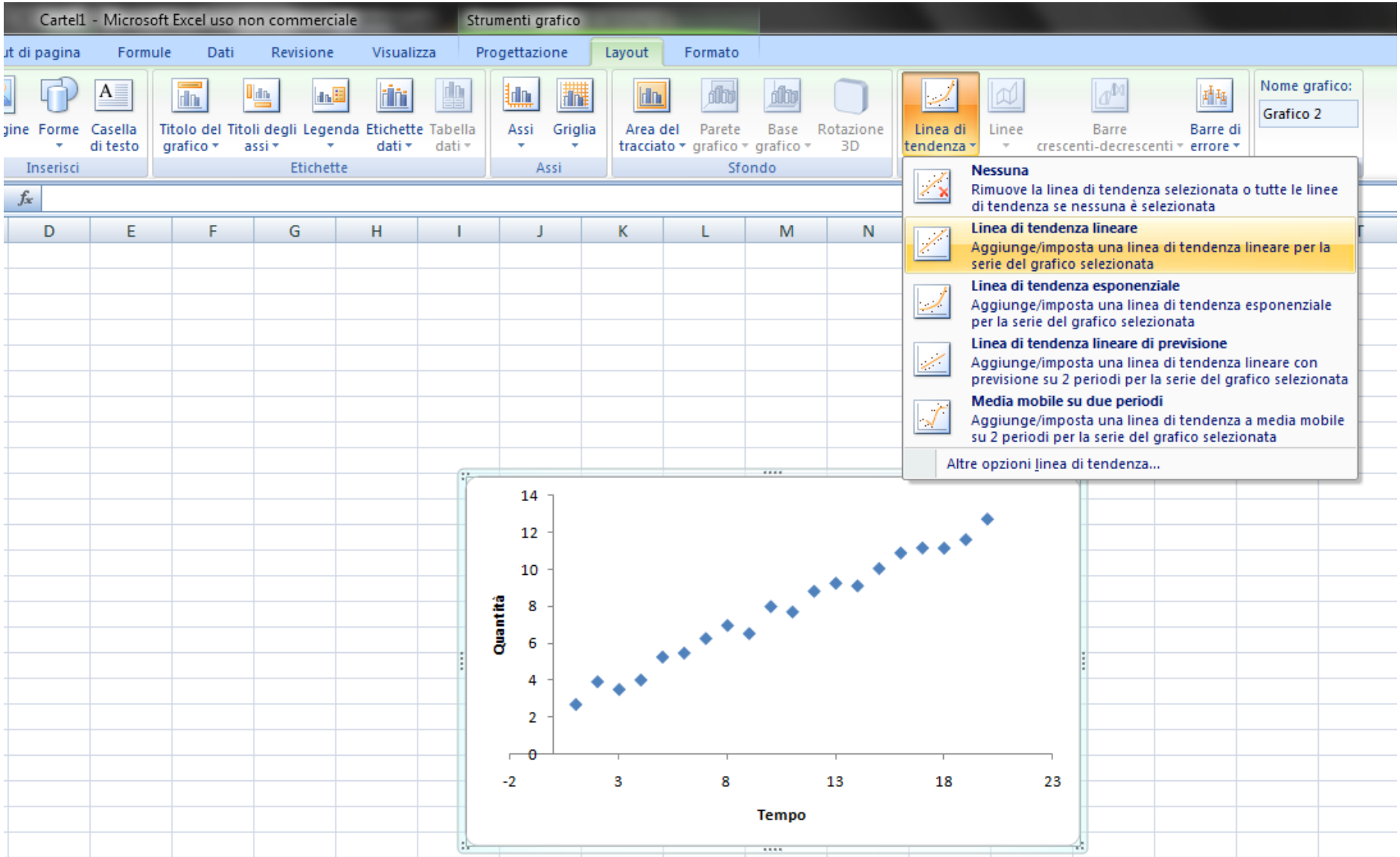
$$SSE = \sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - \omega x_i - b]^2$$

  - In Excel: REGR.{LIN,LOG}

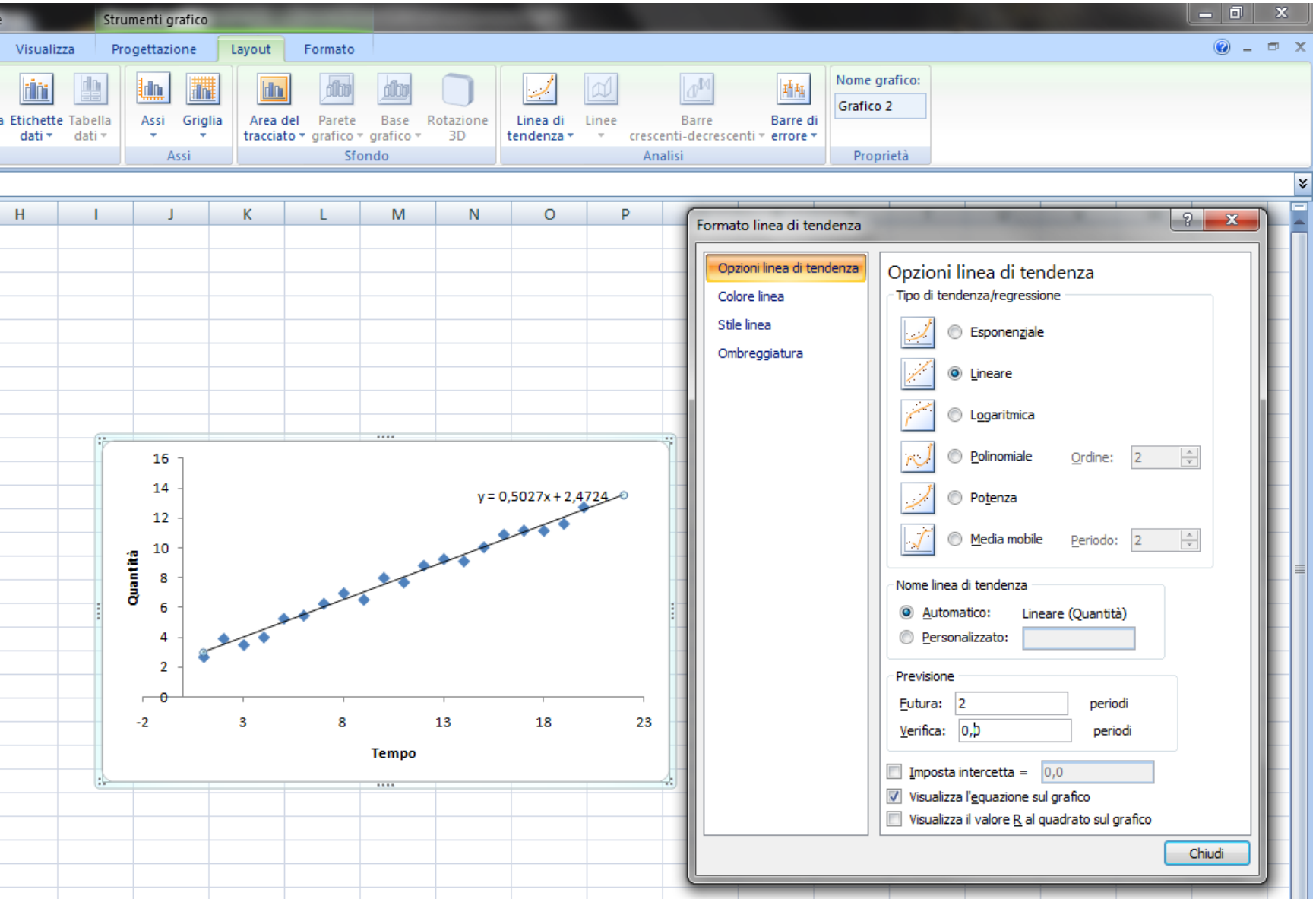
Esempio regressione



Esempio regressione



Esempio regressione



Assunzioni relative ai residui

- Minimizzando SSE, la variabile aleatoria ε deve seguire una distribuzione normale di media 0 e deviazione standard σ.

- Si richiede inoltre che i residui ε_i e ε_k, corrispondenti a due distinte osservazioni x_i e x_k siano indipendenti per ogni scelta di i e k.

- Un modello è tanto più accurato quanto più la deviazione σ risulta prossima a zero.

Esercizi

- Determinare un modello di regressione lineare per il dataset http://statmaster.sdu.dk/courses/st111/data/data/tvads.txt
- Cosa accade se si usa una scala logaritmica?
- Cosa si può dire per il dataset http://statmaster.sdu.dk/courses/st111/data/data/velocity.txt

Valutazione dei modelli di regressione

- Normalità e indipendenza dei residui
- Significatività dei coefficienti
- Coefficiente di correlazione lineare
- Multi-collinearità delle variabili indipendenti
- Limiti di confidenza e predizione
  - In Excel, REGR.LIN()

Normalità e indipendenza dei residui

- Diagramma di dispersione dei residui rispetto ai valori predetti.
  - Un andamento regolare dei residui indica l'esistenza di fattori esplicativi non considerati nel modello.

- Diagramma di dispersione della radice dei residui
  - I valori sono tutti positivi ed attenuati rispetto ai precedenti

Significatività dei coefficienti

- REGR.LIN ci fornisce:
  - $s_1;s_2;...;s_n$ I valori di errore standard per i coefficienti $m_1;m_2;...;m_n$ s_b
  - Il valore di errore standard per la costante b.
  - r^2 Il coefficiente di determinazione.
    - Confronta i valori y stimati con quelli effettivi e può avere un valore compreso tra 0 e 1.
      - r^2=1, correlazione perfetta nel campione
      - r^2=0 previsione di un valore y non corretta.
  - …

Covarianza

- La *covarianza* quantifica la forza della relazione tra due insiemi di valori, ovvero misura quanto lineare è la dipendenza tra i due attributi;
- La covarianza è la media del prodotto delle deviazioni dei valori dalla media degli insiemi dei dati

$$v_{jk} = cov(a_j, a_k) = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - \bar{\mu}_j)(x_{ik} - \bar{\mu}_k)$$

  - In Excel COVARIANZA()
- un valore positivo indica una variazione di X e Y nella stessa direzione, un valore negativo l'opposto

Correlazione

- Un limite della covarianza è la sua dipendenza dall'unità di misura.
- Per esempio possiamo aumentare il fattore covarianza di 1000, semplicemente usando come unità di misura € in luogo di K€
  - Nel caso le unità sono appropriate
- La misura di *correlazione* risolve il problema producendo un risultato indipendente dalle unità di misura e compreso tra –1 e 1

$$r_{jk} = corr(a_j, a_k) = \frac{v_{jk}}{\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k}$$

Correlazione

- Un valore della correlazione vicino a –1 indica che i due insiemi di valori tendono a variare in senso opposto
- Un valore della correlazione vicino a +1 indica che i due insiemi di valori tendono a variare nello stesso senso
- Una indipendenza nelle variazioni dei due valori produce un indice di correlazione uguale a 0
- Ma, attenzione: l'indice di correlazione è rilevante solo per relazioni *lineari*
- L'indice può risultare vicino a 0 anche se esiste una relazione non lineare tra i due insiemi di valori.

Multi-collinearità

- Si parla di multi-collinearità quando sono presenti relazioni lineari tra le variabili indipendenti.
- Si parla di multi-collinearità esatta quando almeno una delle variabili esplicative è correlata con altre variabili indipendenti.
  - Esempio: la produzione settimanale è la somma delle produzioni giornaliere, e tutte le variabili sono incluse nel modello.
- In presenza di multi-collinearità esatta la matrice (X^TX) è singolare e non ammetta inversa.
- La multi-collinearità esatta è piuttosto rara e tipicamente causata da una errore nella definizione del modello.

Limiti di confidenza e di predizione

- Conseguenze della multi-collinearità nelle variabili indipendenti:
  - difficoltà di determinare i contributi individuali delle variabili, perché i loro effetti vengono mescolati o confusi;
  - alta variabilità delle stime con conseguente bassa significatività dei coefficienti di regressione;
  - forte instabilità delle stime dei coefficienti di regressione (piccole variazioni nei dati o l'aggiunta/eliminazione di una variabile dal modello possono portare a grandi variazioni nella stima).
- La multicollinearità non invalida il modello,ma l'interpretazione dei singoli coefficienti di regressione.

Selezione delle variabili predittive

- Per identificare la multi-collinearità si possono calcolare i coefficienti di correlazione tra tutte le coppie di variabili esplicative.
  - Valori elevati (> 0,90) indicano la forte collinearità
  - Valori bassi, non assicurano l'assenza di multi-collinearità
    - Effetto congiunto di due o più variabili esplicative.
- Rimedio:
  - Eliminare una o più variabili indipendenti altamente correlate, senza eliminare variabili significative;

Passi per la costruzione del modello

1. Individuazione dei valori anomali
2. Scelta del modello
3. Individuazione dei parametri
4. Significatività dei coefficienti
5. Previsione per diversi valori della variabile indipendente

Esercizi

- Determinare i modelli di regressione per gli esercizi della lezione scorsa

Sommario

- La regressione lineare semplice e multipla permette di determinare semplici modelli.
- È possibile valutare la bontà di tali modelli valutando la normalità, l'indipendenza dei residui e la significatività dei coefficienti
- Tramite il coefficiente di correlazione è possibile stabilire se ci sono dipendenze lineari tra le variabili indipendenti.
- Le conseguenze della multi-linearità vanno affrontate alla luce delle soluzioni esistenti.